数理解析研究所講究録
14巻 1966年 45-55

Plane algebraic curve について

京大・数理研　中　野　茂　男

瀬藤の講演〃ReggeとBarucchiの Landan曲線の研究について〃のための preliminary として，plane algebraic curveについての解説を試みる。(特に数学者でない方々のために)考えの筋道を説明するのを主眼とし，精密な議論には立入らない。

§1　複素射影空間

1° 定義：d次元複素射影空間とは

$$\mathbb{P}_d \equiv \mathbb{C}_{d+1} - (0)/(\sim).$$

右辺は($d+1$)次元ユークリッド空間$\mathbb{C}_{d+1}$から原点0を除いた残りにおいて，同値関係〜を$(\zeta_0, \cdots\cdots, \zeta_d) \sim (\eta_0, \cdots\cdots \eta_d) \Leftrightarrow \eta_\alpha = \lambda\zeta_\alpha$ for $\lambda \neq 0$ によつて定義し，これによる同値類の集合をあらわす。

2° $\mathbb{P}_d$ の点は連比$\zeta_0 : \cdots\cdots : \zeta_d$ で与えられる。$(\zeta_0, \cdots\cdots \zeta_d)$をこの点の斉次座標という。

3° $\zeta_\alpha \neq 0$ であるような($\mathbb{P}_d$の)部分をU_d とすると，U_dの点をあらわすには$(\zeta_0/\zeta_\alpha, \cdots\cdots, \overset{(\alpha)}{1}, \cdots\cdots \zeta_d/\zeta_\alpha)$をその座標とすることができる。これによつて$U_\alpha$は$n$次元アフィン空間$C_d$と同一視できる。$P_d = {}_{\alpha=0}^{d} U_\alpha$ であつて，P_dは$d+1$個のアフィン空間

を適当に重ねて張り合わせたものとみてよい。U_α での座標（$x^0_\alpha, \cdots\cdots, x^d_\alpha$）〔$x^\alpha_\alpha=1$ は欠けている。この座標を非斉次座標という〕が，$x^0_\alpha=\zeta_0/\zeta_\alpha$ などとして与えられていることから，$U_\alpha \cap U_\beta$ での座標変換がどうなるかは明らかである。

4° $\mathbb{P}_d$ はコンパクトである。一つのアフィン空間 $\mathbb{C}_d$ とその座標（$x^1, \cdots\cdots, x^d$）$x^\alpha=\zeta_\alpha/\zeta_0$ から出発すれば，$\mathbb{P}_d$ とは $\mathbb{C}_d$ に無限遠平面 $\zeta_0=0$ をつけ加えてコンパクト化したものとみることができる。$\mathbb{P}_d$ 内のどの平面を無限遠平面とみるか（即ちどんな非斉次座標をとるか）は，注目する問題によりいろいろである。

5° $d=2$ のときが射影平面 P_2 である。以下このときを主にしていう。$\mathbb{P}_2$ 内の直線 $\mathbb{L}$ とは斉次座標（ζ）に関する一次同次方程式 $\sum_{\alpha=0}^{2} u_\alpha \zeta_\alpha=0$ をみたす点全体の集合で，これ自身が1次元射影空間をなす。P_2 の直線 $\mathbb{L}$ は $\mathbb{L}$ の方程式の係数（u_0, u_1, u_2）で定まる。しかも u の連比が問題になるだけである。それ故 $\mathbb{P}_2$ 内の直線 $\mathbb{L}$ の全体は別の射影平面 $\mathbb{P}^*_2$ の点と一対一に対応する。$\mathbb{P}^*_2$ を $\mathbb{P}_2$ に双対的な平面という。

6° $\mathbb{P}^*_2$ に双対的な平面はもとの $\mathbb{P}_2$ である。その関係はつぎのようにしてわかる。：$\mathbb{P}^*_2$ 内の二点（u），（v）をむすぶ直線 $\mathbb{L}^*$ は〔1次元射影空間の点（$\lambda : \mu$）をパラメーターとして（$\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha$）によつてあたえられる。この点はもとの $\mathbb{P}_2$ 内では $\lambda(\sum_\alpha u_\alpha\zeta_\alpha)+\mu(\sum_\alpha v_\alpha\zeta_\alpha)=0$ なる直線 $\mathbb{L}$ を定めているが，この式は $\mathbb{L}$ か，$\mathbb{L}_u, \mathbb{L}_v$（それぞれ u，v が定める $\mathbb{P}_2$ 内の直線）の交点 p を通ることを意味する。即ち $\mathbb{L}^* \ni w \leftrightarrow \mathbb{L}_w$ は p を通る直線，この関係によつて $\mathbb{L}^*$ が p に対応する。

§2 既約な平面曲線

1° $\mathbb{P}_2$ の斉次座標を（$\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$）とするとき，（$\zeta$）に関する既約な斉次多項式 $F(\zeta)$ の零点の集合 Γ を $\mathbb{P}_2$ 内の既約な代数曲線という。〔$F(\zeta)=0$ なら $F(\lambda\zeta)=0$ であるから，F の零点を $\mathbb{P}_2$ の点と考えることができる。〕

$U_0 \cong \mathbb{C}_2$ 内で非斉次座標（x, y），$x=\zeta_1/\zeta_0$　$y=\zeta_2/\zeta_0$ を考えると $\Gamma_0=\Gamma\cap U_0$ はアフィン空間内の代数曲線で，$f(x,y)\equiv F(1,x,y)=0$ によつて定められる。Γ は $\mathbb{P}_2$ 内での Γ_0 の閉包である。F が既約であるから f も既約である。

2° Γ の点 P が Γ の単点であるとは，P をふくむ U_α における非斉次座標（x, y）についてかいた Γ の方程式 $f=0$ に関して $f_x(p)$，$f_y(p)$ のどちらかが0でないことである。この時 P における Γ の接線は $f_x(X-x)+f_y(Y-y)=0$ で与えられる。これは斉次座標に関しては $F_{\zeta_0}\cdot Z_0+F_{\zeta_1}\cdot Z_1+F_{\zeta_2}\cdot Z_2=0$（（$Z$）が流通座標）で与えられる。$P$ が

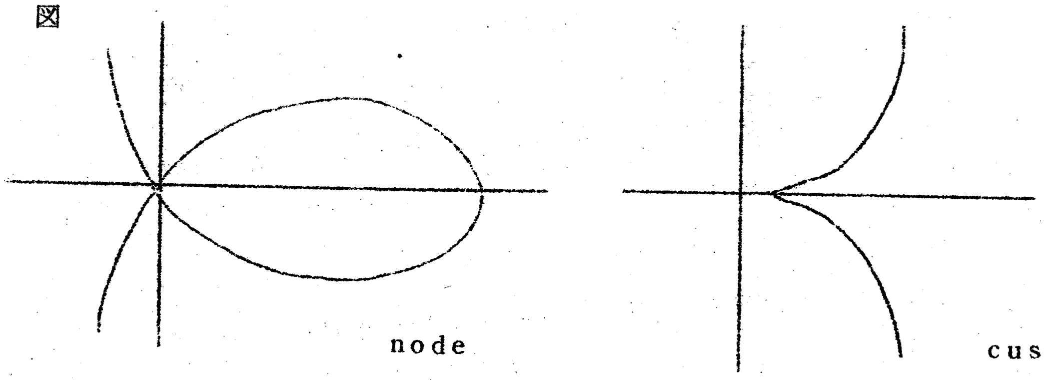
無限遠平面上にあるような非斉次座標に関しては，接線は（pに対応する方向の）漸近線として現れる。

3° pが単点でないとき，pはΓの特異点（又は重複点）であるという。pを原点とするような非斉次座標についてΓの方程式は，

$$f(x,y)=f(0)+(xf_x(0)+yf_y(0))$$
$$+\frac{1}{2}(x^2\cdot f_{x\cdot x}(0)+2x\cdot y\cdot f_{x\cdot y}(0)+y^2f_{yy}(0))$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

とかけるが，pが重複点なら右辺第一項，第二項は0である。x，yについてr次の項が始めて恒等的に0でないときPはr重点であるという。pが2重点のとき，$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2\neq 0$ ならばpの近傍でΓは二つの分枝からなり，それらの接線は一致しない。この時pは通常の節点（ordinary node）であるという。今一つの代表的な重複点は尖点（cusp）である。これは$y^2-x^3=0$における原点のような特異点で，$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=0$のときにおこり，適当な座標変換ののち，パラメーターtを使って$x=t^2$，$y=t^3+\cdots\cdots$とあらわされる点の特異性を意味する。

図



4° $\mathbb{P}_2$から$\mathbb{P}_2'$への"写像"Qを，斉次座標(ζ)，(η)に関してつぎのように定義する：$\eta_0=\zeta_1\zeta_2$，$\eta_1=\zeta_2\zeta_0$，$\eta_2=\zeta_0\zeta_1$　これを2次変換という。（この言葉は代数幾何学ではもっと広い意味にも使われる）Qは本来の意味の写像ではなく$\mathbb{P}_2$の点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$には$\mathbb{P}_2'$の直線$\eta_0=0$，$\eta_1=0$，$\eta_2=0$が対応する。一方，$\mathbb{P}_2$の直線$\zeta_0=0$，$\zeta_1=0$，$\zeta_2=0$はP_2'の点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$に写される。その他の点ではQは一対一である。〔実は一般の点Pで$Q(p)$が一意的にきまり，pを$(1,0,0)$に近づけるとき，近づける方向——それらの方向の全体は射影

直線をなす。── ごとに$Q(p)$ の極限点が定まつてその全体が$\eta_0=0$をなすのである。]

$\mathbb{P}_2$ 内で同一直線上にない任意の三点をとつて，それらが（１，０，０），（０，１，０），（０，０，１）になるような斉次座標をとることができる。従つて任意の点を"拡げる" ことができる。与えられた曲線の特異点を拡げるような２次変換を行うと，" 特異性の程度 " を下げることができる。その結果

定理　既約な平面曲線Γは，その平面に何回かの２次変換を行うことにより，ｏｒｄｉｎａｒｙ ｓｉｎｇｕｌａｒｉｔｉｅｓのみをもつ曲線に変換しうる。

新曲線と旧曲線の間では，任意の一方の座標が他方のそれの有理函数となる。それで両者は双有理的に同値であるという。

（もつと一般な，平面→平面の双有理変換で，ｎｏｄｅｓだけにもできる）

§３　可約な代数曲線，Ｃｙｃｌｅ

１°斉次座標に関して可約な斉次多項式$F(\zeta)$ があるとき，$F(\zeta)$の零点の集合は，$F(\zeta)$の既約因数の零点Γ_i（$i=1$，……r；これらは既約曲線である）の和集合である。それでΓを可約な代数曲線という。

以上は点集合としてのΓを考えたのである。それにしても実は抜穴があつて，$G(\zeta)$が既約なとき$F(\zeta)=G(\zeta)^2$とおけばFのきめる可約曲線は，Gのきめる既約曲線と，点集合としては同一である。それ故上の定義では" 既約または可約な" 代数曲線を定義したことになる。

２°　有限個の既約曲線Γ_i の，整係数による形式的な一次結合，$\Gamma=\Sigma a_i\Gamma_i$ を（射影平面上の，代数的な）ｃｙｃｌｅという。

位相幾何学におけるｃｙｃｌｅの特別の場合になつている。Γ_i の既約方程式が$F_i=0$ であるとき，$F=\Pi F_i^{a_i}=0$をΓの方程式という。こうすればｃｙｃｌｅ とその方程式との間には，Fに０でない定数をかけることを除けば，一対一の対応がつく。ｃｙｃｌｅとは，その既約成分に重複度をつけて考えた可約曲線であるといつてよい。これからは係数a_i が負でないようなｃｙｃｌｅのことを可約曲線とよぶことにする。既約曲線も可約曲線の一種となる。

（負の係数をも考えると，ｃｙｃｌｅ の全体が形式的な加法により群をなすので好都合なのである。）

３°　既約曲線Γと，Γに対し一軽の位置にある直線との交点の数をΓの次数（ｄｅｇｒｅｅ）という。これはΓの方程式の次数にひとしい。これに対し，一般の位置にある点からΓにひいた接線の数をΓの級の数（ｃｌａｓｓ）という。交点や接線を適当な重複度で数えれば，

degree, class は任意の直線とΓとの交点の数，任意の点からのΓへの接線の数となる。可約曲線$\Sigma a_i\Gamma_i$ の次数は$\Sigma a_i\cdot\deg(\Gamma_i)$だと定めると，つぎの定理がなりたつ。

<u>Bezoutの定理</u>　可約な平面曲線Γ_1，Γ_2の次数がn_1，n_2，であるとき，Γ_1とΓ_2との交点は（適当な重複度で数えれば）ちょうど$n_1\cdot n_2$個ある。

このように重複度というものを考えるのが代数幾何学の特徴だが，その正確な定義は難しい。

§4　Dual curve

1°　$\mathbb{P}_2$ 内の既約な曲線Γが方程式$F(\zeta)=0$で与えられているとする。Γの単点(x)での接線を考えると，これはdual plane $\mathbb{P}_2^*$ の点をあらわす。その点は$(u_0:u_1:u_2)=(F\zeta_0(x):F\zeta_1(x):F\zeta_2(x))$で与えられる。これによつて$\Gamma$から$\mathbb{P}_2^*$内への（解析的な）写像$\Phi$が定まり，$\Phi(\Gamma)=\Gamma'$ は$\mathbb{P}_2^*$ 内の既約代数曲線になる。これをΓにdualな曲線という。もつともΓが直線のときは別で，この時は$\Phi(\Gamma)$は一点になつてしまう。以下この場合は除く。Γの一部分（重複点の近くの一分枝でもよい）が，一つのパラメーターtによつて$\zeta=\zeta(t)$ とかけると，そのΦ- imageは$u=u(t)=\left(\dfrac{\partial F}{\partial\zeta}(\zeta(t))\right)$とかける。$u$が接線をあらわす条件は$\sum_i\zeta'_iF\zeta_i=0$ であり，一方斉次多項式に関するオイラーの定理により，$\sum_i\zeta_iF\zeta_i=nF=0$.　これは$\Sigma\zeta_i(t)\cdot u_i(t)=0$ を意味する。これを微分して前の関係を参照すれば$\sum_i\zeta_iu'_i=0$ が与えられる。これはΓ' のdualがΓに他ならないことを意味する。

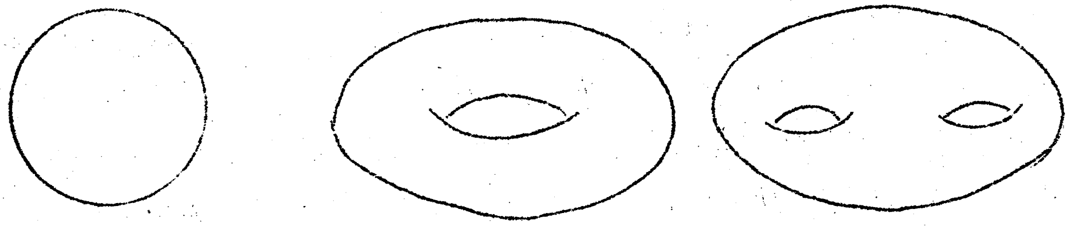
即ち，dual curve という関係は（Γが直線であるときを除いて）双互的であり，ΦによりΓとΓ' とは双有理的に同値である。

2°　$\mathbb{P}_2$ と$\mathbb{P}_2^*$ との双対関係（§1．5°,6°）を考えると，degree Γのclass とは$\Phi(\Gamma)$のdegree に他ならないことがわかる。前項の双対性によつて，$\Phi(\Gamma)$ のclassはΓのdegreeに等しい。今Γとともに$\Phi(\Gamma)$ もnodeとcusp 以外の特異点をもたないとする。$\Phi(\Gamma)$ のnode では二つの相異なる分枝に相異なる接線がひける。これをΓの話に移せば，$\Phi(\Gamma)$ のnode はΓの相異なる二点で接する直線即ちΓのbitangentに対応していることがわかる。同様に$\Phi(\Gamma)$ のcuspはΓの一点で2重に接する接線に対応する。あるいはΓの変曲点に対応するといつてもよい。それ故Γのdegree をn，classをm，nodesの数をδ，cuspsの数をk，bitangents の数をτ，変曲点の数をiで表わし，$\Gamma'=\Phi(\Gamma)$ のそれらを$'$をつけて表わせば，$n=m'$，$m=n'$，$\delta=\tau'$，$k=i'$，$\tau=\delta'$，$i=k'$ となる。

§5 Non-singular model

1°　既約な平面曲線Γに対して，平面内にこれと双有理的に同値なものを求める限り，§3．4°の定理以上には出られない。しかし高次元の射影空間内にはΓと双有理的に同値で重複点を全くもたないもの$\widetilde{\Gamma}$が存在する。しかも$\widetilde{\Gamma}$は本質的には唯一つである。即ちこのようなものが二つあれば，（もとのΓとの双有理的対応を通じて）両者は例外点なしに一対一の双有理的対応をなす。$\mathbb{P}_d$内の，重複点のない既約代数曲線$\widetilde{\Gamma}$とは，斉次座標に関するいくつかの斉次式の共通零点の集合であり，その任意の点x_0の近くで非斉次座標のうちの一つが独立変数，他のものがそれの正則函数としてあらわされ，（$\widetilde{\Gamma}$の方程式がそのようにとけること。このときその座標をlocal parameter という）かつ全体として連結なものである。このような図形は位相幾何学の立場からは，方向づけのできる閉曲面に他ならないので，（複素1次元は実2次元である！）その様子はよく知れている。即ち$\widetilde{\Gamma}$はp個の穴をもつ浮輪の面（$p=0$，1，2，………のどれか）と位相同型である。

pは$\widetilde{\Gamma}$に対して（従つてΓに対して）決まつている値である。pをΓのgenusという。



$p=0$（球面）　　$p=1$（円環面）　　$p=2$

2°　$\widetilde{\Gamma}$上に有限個の開集合$\{V_j\}$をとり，$\bigcup_j V_j=\widetilde{\Gamma}$，しかも$V_j$上では一つの非斉次座標$x_j$がlocal parameter であるようにする。（非斉次座標x_jを考えるとき，無限遠平面として，$\zeta_0=0$，……，$\zeta_d=0$のうちのどれをとつているかは，jによつて変るであろう。）V_j上で定義されたx_jの有理型函数$\varphi_j(x_j)$があつて$P\in V_j\cap V_k$のとき

$$\varphi_j(x_j(P))=\varphi_k(x_k(P))\frac{dx_k}{dx_j}(P)$$

がなりたつならば，表式$\varphi_j(x_j)\cdot dx_j$はjに無関係で$\widetilde{\Gamma}$全体で定まつた"あるもの"を決めている。これを$\widetilde{\Gamma}$上の有理型微分という。特に各々の$f_j(x_j)$がV_jで正則ならば，この微分は第1種であるという。第1種微分同志を加え，または第1種微分に定数をかけることの意味は明らかであろう。これにより$\widetilde{\Gamma}$上の第1種微分の全体gは複素係数のベクトル空間をなす。これに関しつぎの定理がなりたつ。

定理　gはp次元のベクトル空間である。

3° 第1種微分を$\varphi(x)dx$とかくとき，$\varphi(x)$ は実は$\widetilde{\Gamma}$上の有理函数である。(証略，$\widetilde{\Gamma}$上の有理函数とは$\widetilde{\Gamma}$の点の非斉次座標の有理函数なること。)従つてこれはΓの点の非斉次座標に関して代数的にあらわすことができる。以下Γはnode，cusp 以外に重複点をもたないとして論ずる。$\mathbb{P}_2$ の一組の非斉次座標 $x=\zeta_1/\zeta_0$，$y=\zeta_2/\zeta_0$ に関してΓの方程式が$f(x,y)=0$ であつたとする。(無限遠直線$\zeta_0=0$上にはΓの重複点はないようにしておく。) このときf_xが恒等的に0でなければ，$f_x\neq 0$ となるようなΓ上の任意の点の近傍でxがlocal parameter である。それ故$\widetilde{\Gamma}$上の有理型微分は $\varphi=\dfrac{p(x,y)}{f_y(x,y)}dx$ の形にかけるが，ここでφが第1種であるための必要十分条件は

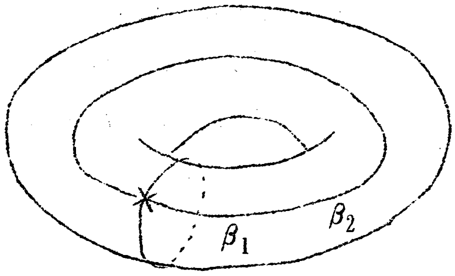
(1) $P(x,y)$がx，yの多項式でその次数$\leqq n-3$
(nはΓの次数即ちfの次数)

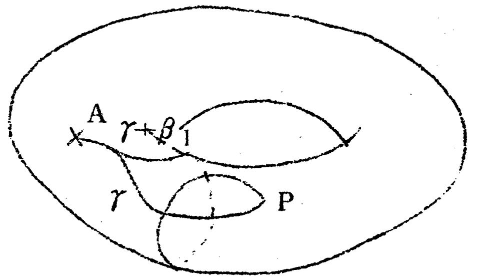
(2) $p(x,y)$はΓの重複点で0となる。

であることが示される。x，yに関する$\leqq n-3$次の多項式で一次独立なものの数は $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ であるから，gの次元pに対し $p=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}-\delta-k$ なる関係がえられる。これがgenus formulaである。

4° 微分，特に第1種微分$\varphi=\varphi(x)\cdot dx$ を$\widetilde{\Gamma}$上の(実の)曲線γ上で積分するということは，定まつた意味をもつ。即ち曲線γが実のパラメーターλによつて$P=P(\lambda)$ $(\alpha\leqq\lambda\leqq\beta)$と与えられ，これをlocal parameter $x=x(P)$ に関して$x=x(\lambda)$とかくとき，$x(\lambda)$ が連続，有限個の(λの)値を除いて$\dfrac{dx}{d\lambda}$も連続で，例外点の所では左右からの極限値が有限確定だとすると，表式$\varphi(x(\lambda))\dfrac{dx(\lambda)}{d\lambda}\cdot d\lambda$ はlocal parameter のとり方に無関係であり，$\displaystyle\int_\alpha^\beta\varphi(x(\lambda))\frac{dx(\lambda)}{d\lambda}d(\lambda)$ はγをあらわすパラメーターλのとり方にもよらない。これを$\int_\gamma\varphi$とかき，γにそうてのφの積分という。Cauchy の積分定理により，γが$\widetilde{\Gamma}$の部分Δの境界$\partial\Delta$であるときは，$\int_\gamma\varphi=0$である。それで，γの始点を固定し終点Pを動点と考えて，$\int_\gamma\varphi$ をPの函数$u(P)$とみると，$u(P)$ は局所的にはPの正則函数で，$\dfrac{du}{dx}=\varphi(x)$となる。このような函数を$\widetilde{\Gamma}$上のAbel積分という。局所的にはというのは，$u(P)$ が$\widetilde{\Gamma}$全体での一価函数ではないからで，βが2次元部分の境界になりえない閉曲線であるとき，Pがβに沿つて一周してもとの位置にもどるとき，$u(P)$ には定数$\omega=\int_\beta\varphi$が加わる。

$p=1$のときはこのようなγ'の基本的なものが二つあつて，同一点Pに対するuの値は$m_1\omega_1+m_2\omega_2$ (m_1，m_2は整数)だけ不定である。逆に$\widetilde{\Gamma}$上で一価な有理型函数($\widetilde{\Gamma}$の点の非斉次座標の有理函数)はuの二重週期函数即ち楕円函数としてあらわされる。実際，この場





合$\widetilde{\Gamma}$は複素平面$\mathbb{C}$（uの平面）上でuと$u+m_1\omega_1+m_2\omega_2$（$m_1 m_2=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，$\cdots$）とを同一視してえられた空間なのである。

§6 Plückerの公式

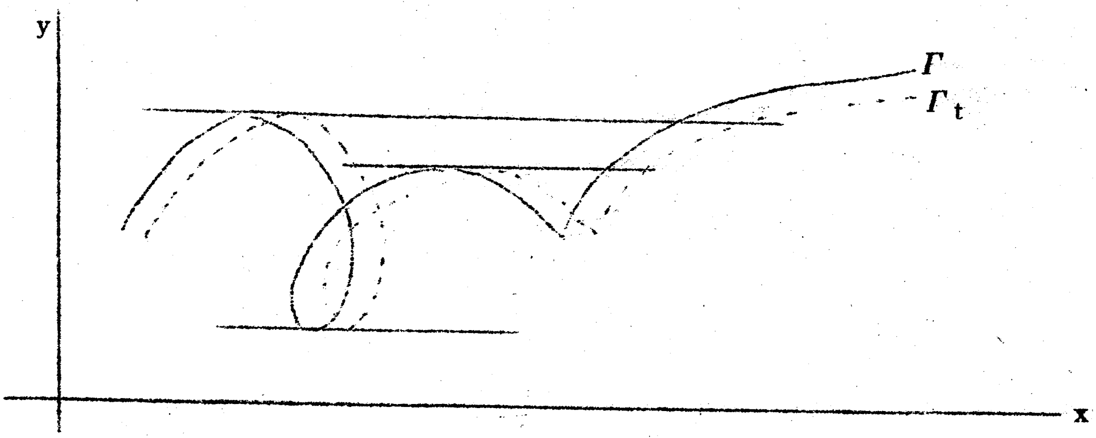
1° 再び既約な平面曲線Γにもどる。ΓとそのdualΓ'がともにnode とcusp 以外の重複点をもたないとする。この場合つぎの関係が成立する ；（n=次数，m=class，δ=node の数，k=cuspsの数，τ=bitangents の数，i=変曲点の数，すべて曲線Γについていう。）

$$m=n(n-1)-2\delta-3k, \qquad n=m(m-1)-2\tau-3i$$

$$k=3m(m-2)-6\tau-8i, \qquad i=3n(n-2)-6\delta-8k$$

これらをPlücker の公式という。dual curve を考えれば，右側の式は左側の式の結果であることがすぐ判る。

2° mを与える式の説明を試みよう。Γに対し一般の位置にある点P_0をとり，これを（0：1：0）とするような斉次座標をそる。そして$x=\zeta_1/\zeta_0$，$y=\zeta_2/\zeta_0$を考えると，P_0 はx軸方向の無限遠点となり，P_0からひいた接線とはx軸に平行な接線のことになる。そこでΓをx軸に平行にtだけずらせてΓ_tとする。Bezout の定理によりΓとΓ_tとはn^2個の交点をもつが，その中n個はΓと無限遠直線との交点である。（非斉次座標に関する平行移動では直線の方向が変らない。従つてその方向の無限遠点が変らない。）つぎにx軸に平行なk個の接線の接点に対し$t\to 0$のときこれらに近づくようなk個の交点が存在する。$t\to 0$のとき各々のnodeの所では2つずつの交点がこれに近づき，cusp の所では3つずつの交点が近づく。（図から大体判る，cusp の所は判り難いが，cusp は[illegible]なるnode のloop が小さくなつた極限とみると，尤もらしく思える。正確な議論はややこしい）



従つて，$n^2=n+m+2\delta+3k$ となり求める関係がえられる。

3° Γの方程式を$F(\zeta)=0$ とし，その次数nは$\geqq 2$とする。点(a)をΓの単点，(b)を$\mathbb{P}_2$ の一点とすると，

(*) $F(s\cdot a+t\cdot b)=F(a)\cdot s^n+\sum_j F_j(a)b_j s^{n-1}t+\frac{1}{2}\sum_{ij}F_{ij}(a)\cdot b_i b_j s^{n-1}t^2$

$+\cdots\cdots$，ここに$F_i=\dfrac{\partial F}{\partial\zeta_i}$ ，$F_{ij}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}$ であり$\sum_j$は$\sum_{j=0}^{2}$ である。(a) におけるΓの接線Lは$\sum F_j(a)\zeta_j=0$，で与えられる。$\sum F_{ij}(a)\zeta_i\zeta_j=0$ なる2次曲線をQとかく。一方$H(\zeta)=\det(F_{ij}(\zeta))$ とおく。$H(\zeta)$ は(a) に無関係でζにつき$3(n-2)$次式である。"(a) がΓの変曲点$\Longleftrightarrow$ (a) はΓの単点で，$H(\zeta)=0$上にある。"を証明する。実際(a) が変曲点なら(a) はΓの単点であり，bが接線L上にある限り（即ち$\sum_j F_j(a)b_j=0$である限り）(*) で t^2 の項がきえる。これはQが直線Lをふくむことを意味するから，Qの係数の行列式$H(a)$ が0となる。逆に$F(a)=0$，$H(a)=0$とする。$F(a)=0$から（斉次式に関するEulerの定理により） $\sum_j F_j(a)a_j=0$ ，$\sum_{ij}F_{ij}(a)a_i a_j=0$，従つて$L$も$Q$も$(a)$ を通る。さらに(a)でのQの接線は$\sum_{ij}F_{ij}(a)a_i x_j=0$即ち$\sum F_j(a)\cdot x_j=0$となり，これは$L$に他ならぬ。$H(a)=0$は$Q$が二直線に分解していることを示すから，$L\subset Q$となり，$\sum_j F_j(a)b_j=0$なら必ず$\sum_{ij}F_{ij}(a)a_i b_j=0$ ，これは(a)が変曲点となることを示す。

Bézout の定理により，Γと$H(\zeta)=0$との交点は$3n(n-2)$ 個あるが，その中変曲点がi個，他の交点はΓの重複点からおこる。各々のnode は6個，cuspは8個の交点をもたらすことがいえるので，$i=3n(n-2)-6\delta-8k$ が与えられる。node について だけ少し詳しくやつてみよう。

$(1,0,0)$がnode であるとする。$x=\zeta_1/\zeta_0$，$y=\zeta_2/\zeta_0$とおき，話を非斉次

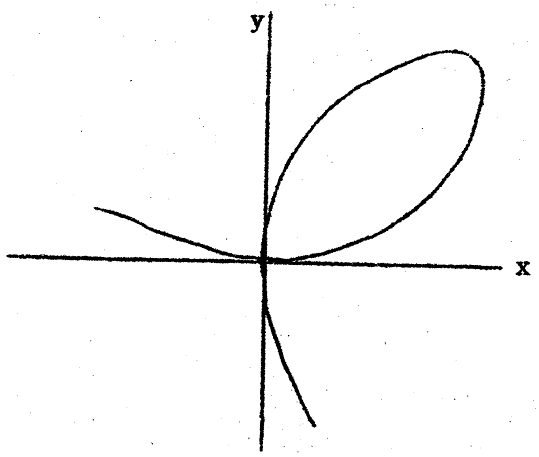
座標にうつす。Euler の恒等式により，

$$\begin{cases} \zeta_0 F_0 = nF - \zeta_1 F_1 - \zeta_2 F_2 \\ \zeta_0 F_{0i} = (n-1) F_i - \zeta_1 F_{1i} - \zeta_2 F_{2i} \end{cases}$$

$$\therefore H(\zeta) = \begin{vmatrix} \frac{n}{n-1}F & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \times \frac{(n-1)^2}{\zeta_0^2}$$

そうすると $f(x,y)=F(1,x,y)$ に移ってもよい。即ち $H(\zeta)=0$ は，(x,y) については

$$h(x,y) \equiv \begin{vmatrix} \frac{n}{n-1}f & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = 0$$



となる。x，y の適当な一次変換により，

$$f(x,y) = xy + g(x,y),$$

$$g(x,y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 + (\text{4次以上の項})$$

とかける。それで Γ は原点の所で２つの枝をもつ。x 軸に接する枝は，$x=t$，$y=t^2+\cdots\cdots$ とあらわれるはずである。（必要なら y に定数をかける）これを代入して $f\equiv 0$ となるのだから，$1+\alpha=0$ がえられる。そうすると

$$\begin{cases} f_1=(1+3\alpha)\cdot t^2+\cdots\cdots\cdots, & f_2=t+\cdots\cdots\cdots \\ f_{11}=6\alpha t+\cdots\cdots & , \quad f_{12}=1+\cdots\cdots\cdots \\ f_{22}=6\gamma\cdot t+\cdots\cdots \end{cases}$$

となるため，$h(x(t),y(t))=2t^3+\cdots\cdots$ となる。このことは，x軸に接するΓの分枝が，原点において$h=0$と3重の交点をもつことを示す。今一つの分枝からも3重の交点が出てくるのである。

4° §2. 4° で述べた定理の証明の状態を詳しくみれば，Γがどんな型の重複点をもつときにも，それをいくつのnodesいくつのcuspsと数えれば，Plücker の公式が適用できるか判るはずだが，ここではとても触れられない。

文献 ： R. J. Walker 著 Algebraic Curves
Princeton Univ. Press 1950, Dover Publications 1962.